1081. D'Amore, B., & Duval, R. (2024). Similitudes y diferencias entre la educación de la mirada en geometría elemental y en arte figurativo. ¿Qué variables cognitivas y didácticas intervienen? ¿Cómo se representa la imposibilidad en el arte? ¿Qué elementos semióticos pueden intervenir en el arte? En: M. T. Moretti (Ed.), *Florilegium* de investigaciones que envuelven la teoría semiocognitiva del aprendizaje matemática de Raymond Duval. Pp. 26-49. Florianópolis: GPEEM/PPGECT/UFSC.

Similitudes y diferencias entre la educación de la mirada en geometría elemental y en arte figurativo
¿Qué variables cognitivas y didácticas intervienen? ¿Cómo se representa la imposibilidad en el arte? ¿Qué elementos semióticos pueden intervenir en el arte?

Similarities and differences between gaze education in elementary geometry and figurative art
What cognitive and didactic variables are involved? How is impossibility represented in art? What semiotic elements can be involved in art?

Bruno D'Amore[1,2,3] y Raymond Duval[4]

[1] *Profesor titular experto, Doctorado Interinstitucional, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*

[2] *NRD, Departamento de Matematica, Università di Bologna, Italia*

[3] *Miembro de la Academia de las Ciencias de Bologna, Italia*

[4] *Profesor emérito, Université du Littoral Côte d'Opale, Francia*

Resumen. *Un acto espontaneo y aparentemente inmediato y simple, como la mirada, que se usa para observar las figuras en geometría o las pinturas en el arte figurativo, revela por el contrario una complejidad notable no esperada en el aprendizaje de la geometría. En este estudio se sugieren modalidades didácticas para ayudar a educar esta mirada. Se proponen analogías entre el "ver" figuras geométricas y el "ver" obras del arte figurativo. Se analiza el fenómeno del reconocimiento de las figuras así llamadas imposibles y se proponen algunos ejemplos de obras de arte para la interpretación de las cuales no es suficiente la mirada, sino que es necesario un análisis de tipo semiótico (sugerida por el autor).*

Palabras clave: geometría elemental, didáctica de la geometría, mirada, ver en geometría – ver en el arte figurativo.

Abstract. *An apparently immediate and simple spontaneous act, as the sight, that we use to look at figures in geometry and at pictures in figurative art, reveals on the contrary unexpected complexities with remarkable consequences on the learning of geometry. In this study we suggest didactical ways to educate it. We suggest several analogies between "seeing" geometrical figures and "seeing" in figurative art. We analyse the recognition of the so-called impossible figures and we provide some examples of works of art for whose interpretation sight is not enough, but it requires a semiotic analysis (suggested by the author).*

Keywords: elementary geometry, geometry education, sight, to see in geometry – to see in figurative art.

1. Prólogo

Este artículo aborda diversas cuestiones relacionadas con la mirada que se activa en los bocetos o dibujos que representan figuras del mundo de la geometría o de las obras de arte. Se trata tanto de comprender su funcionamiento como de estudiar su necesidad desde un punto de vista didáctico.

Duval (2018) afirma que ante una figura geométrica "construida" con instrumentos, y no dibujada a mano alzada, o ante una obra pictórica, "ver" y "reconocer" es lo mismo, pues son los mismos procesos cognitivos de reconocimiento visual los que controlan la mirada. Así, ante una figura geométrica, no basta con saber qué propiedad tiene, o tener conocimiento de lo que representa, para "verla" y poderla utilizar. Primero se requiere reconocer visualmente todas las configuraciones posibles que la figura ofrece a la mirada ya que, en matemática, el reconocer implica que se pueda convertir espontáneamente una representación de un registro en otro.

Ante una figura geométrica o un cuadro, los procesos de reconocimiento que controlan la mirada son cognitivamente complejos. Estos procesos no son los de la percepción de los objetos de nuestro entorno, ni los relacionados con la coordinación de los registros. Estos procesos requieren el despliegue de transformaciones semióticas específicas de los registros de representaciones bidimensionales. El análisis comparativo que se requiere en geometría para "ver" las formas de una figura y las que se requieren para ver una pintura ha permitido distinguir operaciones cognitivas comunes. Estas operaciones se basan en las formas percibidas, es decir en las unidades figurales que surgen de la estructura geométrica de la figura o de la composición de la pintura. Las transformaciones puramente figurales son como metamorfosis del reconocimiento a las cuales las unidades figurales pueden dar lugar en la mirada, sin necesidad de distinguir lo que se da a ver en el papel, en el lienzo o en la pantalla.

Para permitir que los alumnos entren en el mundo de la geometría (todos los alumnos, sin ninguna excepción), hay que empezar por la educación de la mirada, antes de cualquier adquisición de conocimientos, antes de cualquier exigencia de razonamiento, antes de cualquier uso de instrumentos de medida y de fórmulas para calcular. Sin esto, seguirá habiendo una incomunicación insuperable entre alumnos y profesores. Porque, ante una figura, los alumnos no ven en absoluto lo mismo que ven los profesores o los matemáticos.
En la primera parte del siguiente texto se esboza el esquema programático de una enseñanza de la geometría elemental, en el cual es la educación de la mirada la que introduce al mundo de la geometría.
La segunda parte del texto profundiza más decididamente en el mundo del arte. En Duval (2018) se destacó el problema del reconocimiento de la imposibilidad en el visionado de una figura o de una obra de arte. ¿Qué caracteriza esa imposibilidad? ¿Cómo se percibe con la mirada? A través de ejemplos apropiados, se intenta responder a estas preguntas. A continuación, se evidencia cómo el análisis semiótico es necesario en la interpretación de ciertas obras de arte, tomadas como modelo; y cómo la mera mirada o la simple observación, sin indicaciones semióticas interpretativas precisas dadas por el autor, permiten captar sólo la imagen, pero no el significado. Esto se trata de una debilidad de la sola mirada que, sin dejar de ser la protagonista de este estudio, debe ir acompañada del conocimiento, al menos en ciertas ocasiones, como las que se tomarán como ejemplo.

2. El conflicto cognitivo relativo a la geometría elemental en la escuela primaria y secundaria

Desde un punto de vista matemático, la especificidad de la geometría elemental no es la de introducir figuras que vemos y podemos construir, sino que tenemos que utilizar términos definidos para saber qué representan y poder utilizar esos términos para nombrar y describir. En otras palabras, en la geometría elemental no se tendrían que ver las figuras a simple vista, al contrario hay que usar ... lentes especiales para mirarlas. Estos lentes son las hipótesis dadas junto a la figura, o a veces sin ella, hipótesis que enuncian sus propiedades. En este sentido, la forma en que tenemos que mirar las figuras en la geometría elemental está a los antípodas con la forma en que miramos un cuadro en un museo. Un cuadro a menudo no necesita palabras: lo que ofrece para ser visto es autosuficiente y habla su propio lenguaje específico a los ojos. (En realidad, no siempre es así, como mostraremos más adelante).
La enseñanza de la geometría elemental en la escuela primaria y en los primeros años de la secundaria se enfrenta a esta inversión de la relación cognitiva entre el ver y el decir, donde las palabras ya no designan lo que se ve. Las columnas (A) y (B) del cuadro siguiente representan este *conflicto cognitivo inherente a la actividad geométrica*. Y las tres flechas entre estas dos columnas representan

el dilema pedagógico que implica este conflicto cognitivo para la organización de las actividades de aprendizaje. O se parte de lo que interesa en matemática, y que sólo se puede entender y no ver: pero entonces todo se vuelve ininteligible, como fue el caso de la enseñanza de la geometría en el período de la llamada “matemática moderna” en los años 70-80. O bien se parte de figuras que se pueden ver, construir, medir y clasificar, como por ejemplo los polígonos regulares: pero entonces se abre una brecha entre una geometría empírica concreta y una geometría en la cual se resuelven problemas mediante micro demostraciones.

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">(A) Lo que perceptivamente es dado para mirar</td><td>(B) Lo que matemáticamente se requiere “ver”</td></tr>
<tr><td></td><td>FIGURA TRAZADA instrumentalmente</td><td>ESPACIO, PLANO</td><td>HIPÓTESIS DADAS recurso al lenguaje</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Actividad</td><td>(2) Figuras simples de base, presentadas aisladamente</td><td rowspan="2">Cuadriculación, pavimentación, plano reflejo</td><td rowspan="2">(1) Términos que indican propiedades (definiciones)
(3) Hipótesis dadas y preguntas (enunciado de un problema)
(5) Valores numéricos codificados sobre la figura trazada</td></tr>
<tr><td>(4) Composición de al menos dos figuras de base</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Observar diferentes figuras, o medirlas, para COMPARARLAS</td><td>CONSTRUIR instrumentalmente
ESCRIBIR un mensaje de reglas para la construcción</td></tr>
</table>

Figura 1. Esquema del problema didáctico de la enseñanza de la geometría.

Tanto si se adopta el enfoque experimental e inductivo, como si se adopta el directamente vinculado con el descubrimiento de propiedades a partir de las restricciones que toda construcción de figuras requiere, la enseñanza de la geometría en Primaria y en los primeros años de Secundaria resulta conducir a un callejón sin salida. Los estudiantes, en su gran mayoría:

(1) permanecen con la percepción de figuras trazadas y un conocimiento “botánico” (Duval, 2008, p. 55) de las figuras geométricas básicas: triángulo, paralelogramo, cuadrado, círculo, ...;

(2) no pueden salir del contorno cerrado de la figura, ni siquiera para prolongar uno de sus lados;
(3) no pueden, en el proceso de resolución de un problema, añadir nuevas líneas en la figura para resaltar otras figuras básicas, es decir descomponerla y reconfigurarla;
(4) no adquieren o confunden los términos necesarios para el uso de hipótesis y la comprensión de enunciados, como se pone de manifiesto en el desfase, a menudo considerable, entre las producciones de los alumnos en las tareas de construcción de figuras y en las de escritura o explicación verbal de las instrucciones para que se construyan las figuras (Asenova, 2018);
(5) no pueden utilizar las figuras sino tomando medidas en el dibujo o utilizando valores numéricos dados, pero no siempre reconocen las fórmulas de cálculo que deberían utilizar, excepto las del perímetro y el área de los cuadriláteros.

Estos cinco obstáculos persisten a lo largo de todo el camino hasta la escuela secundaria.
El bloqueo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la escuela primaria y en los primeros años de secundaria proviene de ignorar o descuidar el conflicto cognitivo entre el "decir" y el "ver" el cual es inherente a la geometría elemental.

Dos preguntas son esenciales para aclarar los procesos cognitivos de comprensión específicos de la geometría elemental:
- ¿en qué consiste este acto cognitivo, y no matemático, que llamamos "ver"?;
- ¿cómo puede una figura dibujada visualizar propiedades geométricas que no pueden percibirse visualmente en una figura?

2. Análisis del proceso de reconocimiento visual como prerrequisito para "comprender" en geometría elemental

Desde un punto de vista cognitivo, *"ver" es reconocer una forma de un vistazo* gracias a su contorno cerrado o por el color que la resalta, como "figura", desde un fondo en relación con otras formas. Este reconocimiento visual se funde con el reconocimiento cognitivo del objeto cuyo perfil es su contorno característico. Pero ambos son independientes el uno del otro. Por lo tanto, al mirar un cuadro en un museo, el reconocimiento cognitivo de lo que está pintado allí es a menudo inútil: puede incluso ser un obstáculo para la "escucha visual" del cuadro.
Ver, por tanto, es en general un proceso automático que no implica los aparatos cognitivos, un acto puramente sensorial; pero, en geometría, este proceso adquiere un papel determinante en el aprendizaje o en la acción escolar: no sólo hay que "ver", sino también "saber ver" gracias a un entrenamiento cognitivo adecuado, lo cual significa distinguir, reconocer, establecer, relacionar, ...; mientras que en el mundo del arte figurativo "ver" puede coincidir con

reconocer en ciertas expresiones del arte figurativo, pero sobre todo interpretar a partir de conocimientos específicos, otros modos artísticos (arte abstracto, informal, surrealismo, arte analítico, arte cinético, ...).
Las columnas I, II y III del diagrama siguiente representan el proceso cognitivo del acto de reconocimiento visual de los contornos cerrados en 2D, a simple vista, independientemente de cualquier hipótesis, es decir, antes de cualquier reconocimiento cognitivo de los objetos que representan.
La columna I recuerda el análisis gestáltico del proceso cognitivo del reconocimiento visual.
La columna II introduce la noción central para analizar este proceso, la de "unidad figural". Una unidad figural se caracteriza por su número de dimensiones *n*D, y por el número de dimensiones de su soporte material, 2D o 3D, lo que permite distinguir las figuras y los patrones. Son las unidades figurales que se ven y se reconocen a simple vista.
Por último, la columna III muestra un salto entre las unidades figurales *n*D inmediatamente reconocidas y *todas las posibles unidades figurales nD* que se pueden reconocer visualmente.
Para la geometría plana y para la pintura, todas las unidades figurales son obviamente unidades 2D/2D. Este proceso cognitivo de reconocimiento visual es el mismo tanto si se mira una figura geométrica como si se mira un cuadro.
El poder heurístico de las figuras y la creación de las pinturas residen en la actividad de la mirada que las explora o contempla, y no en el ensamblaje de contornos cerrados o de superficies que conforman la figura trazada o la pintura.

PRIMERA MIRADA → LA MIRADA DENOMINAR PARA DEDUCIR
sobre lo que se da para ver

I. FORMA TRAZADA Y PERCIBIDA Un contorno cerrado *que se destaca de un fondo* (neutro o cuadriculado) o de un conjunto de otras formas	II. UNIDAD FIGURAL *n*D/(2D o 3D) *n*D: *número de dimensiones de la unidad figural* (2D): *dimensión del soporte* pantalla o papel, y (3D): modelos (maquetas)	III. TODAS LAS UNIDADES FIGURALES *n*D POSIBLES (1) *Muchas más unidades figurales posibles* que las unidades figurales reconocidas en una primera mirada (2) Posibilidad de mirar por *yuxtaposición o sobreposición*	IV LENGUAJE MATEMÁTICO (3) *Términos* (definiciones) (4) *Hipótesis dadas* *Razonamiento* (no deductivo ni de cálculo)
		(1) Y (2) **DESCOMPOSICION** *de las formas percibidas* 2D reconfiguraciones (3) **DESCONSTRUCCIÓN DIMENSIONAL** *de todas las unidades figurales posibles* 3D 2D 2D 1D	SUSTITUCIÓN de enunciados de uno a otro *en función de teoremas* y no de asociación de palabras, de ideas o de imágenes

Figura 2. Esquema del proceso cognitivo de comprensión en geometría elemental.

La comparación de los dos esquemas muestra las diferencias entre el punto de vista matemático y el punto de vista cognitivo para analizar la adquisición de conocimientos en geometría.

La columna A del diagrama didáctico (Figura 1) se sustituye aquí por las columnas I y II, que hacen hincapié en el salto cognitivo que deben dar los alumnos para entrar en la *modalidad matemática de mirar una figura, independientemente de las hipótesis dadas*. La columna IV se basa en la columna B del diagrama anterior, salvo por una diferencia: ya no se trata de decir o de nombrar para "ver" lo que la figura representa, sino de nombrar para deducir nuevas propiedades a partir de hipótesis. Pero lo importante es la relación, en cada uno de los dos esquemas, entre la última columna, la del lenguaje matemático, que no cambia pasando de un esquema a otro, y las columnas correspondientes a la forma en que se ven las figuras. Esta relación está marcada por las flechas.

El esquema de la problemática didáctica enfatiza al mismo tiempo la reducción del "ver" como su subordinación al lenguaje y a las magnitudes, sin las cuales no es posible acceder a las propiedades y a los objetos matemáticos (Figura 1, flecha con línea continua que va de B a A). Pero las figuras, a pesar de todas las actividades de construcción, no ayudan a entenderlas (flecha punteada que va de B a A). estas figuras subsisten como una figura-tipo asociada a una palabra matemática (flecha punteada que va de A a B).

En el esquema del proceso cognitivo, ya no hay conflicto cognitivo entre el ver y el decir. En primer lugar, el descubrimiento de la forma matemática de ver se produce independientemente del lenguaje y de cualquier hipótesis. Las actividades deben basarse principalmente en el reconocimiento visual de las diferentes unidades 2D que forman una configuración (Figura 2, flecha horizontal con trazo continuo). Esto porque cada figura, incluso las denominadas "simples" o "de base", son configuraciones de unidades figurales *n*D. Ya no se trata de construir figuras, sino de descomponerlas para reconfigurar de otra manera las unidades figurales reconocidas (flecha de la columna IV a la III). Se observará que ninguna flecha parte de las columnas II y III para llegar a la columna IV.

Para comprender en geometría elemental y poder utilizar sus conocimientos, tenemos que aprender a ver y mirar todas las configuraciones *n*D/2D en el juego de transformaciones visuales que permiten (Duval, 2005). Tenemos que ser capaces de reconocer espontáneamente las unidades *n*D/2D para poder adquirir conceptos geométricos y resolver problemas. "Comprender" en geometría elemental es, pues, sinónimo de un conjunto de otros verbos: captar signos y rasgos específicos, ser capaz de distinguir elementos de signos, reconocer elementos específicos del dibujo o de la representación, a veces captar el significado progresivo de una figura que se presenta como una unidad estructural, saber referirse a figuras análogas, ser capaz de captar informaciones específicas, ...

3. Los tres tipos de visualización geométrica y pictórica

Aquí queremos destacar tres tipos de visualización que se despliegan tanto en la geometría como en la pintura. Los dos primeros tipos se basan en el reconocimiento de formas, es decir, de contornos cerrados. Estos son comunes a la geometría elemental, a la pintura y al mosaico; se distinguen entre sí por la ausencia (2D/2D) o la presencia de la tercera dimensión (3D/2D). El tercer tipo de visualización es específico de la geometría. El primer tipo de visualización es el necesario para introducir la geometría en la escuela primaria y en los primeros años de la secundaria.

Al comparar las figuras geométricas con las pinturas, se pueden identificar cinco variables cognitivas para la visualización inicial (Duval, 2018, pp. 216-219). Son las mismas variables que controlan la mirada y la exploración visual ante una figura o un cuadro. Y, en geometría, esto es heurísticamente decisivo para la resolución de problemas (Duval, 2008, p. 55, Figura 12; Duval, 2015, p. 152, Figura 2).

El objetivo de la educación de la mirada en este primer tipo de visualización es lograr que los alumnos puedan *reconocer todos los posibles contornos cerrados de una configuración*, los reconocibles por yuxtaposición y los reconocibles por superposición, *y que puedan recombinarlos para obtener diferentes configuraciones. Y esto debe hacerse casi por reflejo, en menos de uno o dos minutos*. Naturalmente, todas las actividades encaminadas a este objetivo *excluyen la consideración de las dimensiones* y, por tanto, las actividades de medición y todas las indicaciones de longitud relativas a unidades figuradas reconocidas.

El proceso de reconocimiento visual de las unidades figurales es el mismo para las configuraciones B y C de la Figura 1 (Duval, 2018, p. 216). El trabajo de observación de las figuras es, en efecto, irrelevante, salvo desde la perspectiva de la heurística puramente visual; de lo contrario, la percepción seguirá siendo la principal fuente de bloqueo o error en la resolución de problemas, incluido el reconocimiento de las fórmulas que deben aplicarse para calcular una longitud o un área.

El segundo tipo de visualización impone tomar en consideración la tercera dimensión. Este tipo se asocia a la invención de la perspectiva. Se trata de una construcción matemática que organiza el campo de visualización subordinando todos los contornos cerrados reunidos en la misma configuración a relaciones de magnitud (Duval, 2018, p. 236, Figura 10). Pero el segundo tipo de visualización es mucho más amplio. Abarca cualquier composición de formas

2D/2D permitiendo la visualización de una superficie en relieve o cavidad, sólidos en 3D/2D (Duval, 2018, p. 233, Figura 8). En otras palabras, abarca cualquier visualización de un objeto *en el espacio* en función del lado desde el cual se mira, e independientemente de su posición con respecto a todos los demás objetos vistos al mismo tiempo.

La visualización propia de la geometría en el espacio es independiente de la visualización basada en la perspectiva. Esta da lugar, para los sólidos, a la fabricación de modelos 3D/3D manipulables o en cuyas caras se pueden dibujar las intersecciones de un plano de sección, ya que el razonamiento exige volver a las unidades figurales 2D/2D y 1D/2D. Pero la visualización de un sólido en el espacio puede llevar a la visualización de un objeto imposible (Duval, 2018, p. 237, Figura 11).[1]

Por último, la visualización del relieve de una superficie moviliza una construcción matemática menos compleja. Esta se basa en la reiteración de ciertas unidades figurales 2D jugando tanto con sus combinaciones como con su deformación progresiva (Duval, 2018, p. 220, Figura 3; y p. 235, Figura 9). Aquí, en última instancia, lo decisivo es la mirada del artista (por ejemplo, los colores pueden ser cruciales).

El tercer tipo de visualización es el que nos permite responder a la pregunta clave para entrar en la geometría: ¿Cómo puede una figura trazada visualizar propiedades geométricas que no se pueden percibir visualmente en una figura? Esta cuestión da un vuelco al problema didáctico de la enseñanza de la geometría. No se trata de construir figuras, ni siquiera con herramientas que exigen tener en cuenta las propiedades geométricas de la figura a construir (como la regla, la escuadra, el compás, …). Se trata de deconstruir las configuraciones 2D/2D en una red de líneas rectas 1D/2D subyacentes. Para dibujar esta red de rectas, es necesario no sólo prolongar todos los lados de la figura, sino también enriquecerla con nuevas rectas (Duval, 2015, p. 162, Figuras 6 y 7).

En otras palabras, la actividad de deconstrucción dimensional permite superar inmediatamente los obstáculos (2) y (3) mencionados anteriormente, mientras que la actividad de construcción conduce, por el contrario, a reforzarlos cognitivamente e institucionalizarlos. Sólo en una red de rectas deconstruidas dimensionalmente podemos ver las propiedades geométricas; todas estas se destacan visualmente como la relación entre dos unidades figurales, ya sean de la misma o diferentes dimensiones (Duval, 2015, p. 164, Figura 8).

Estos tres tipos de visualización son visualizaciones no icónicas. Se oponen a la *visualización icónica*, con la cual la pintura, desde el arte parietal de los Salones de los nobles del siglo XIX, se ha confundido durante mucho tiempo. Aquí, "ver" una imagen significa reconocer de un vistazo el tipo de objeto que representa: un rostro, un animal, una flor etc. En otras palabras, el criterio de la

[1] Mas adelante regresaremos en este punto de una forma mas explicita.

iconicidad es la posibilidad de yuxtaponer el modelo con la representación que la reproduce a partir de trazos o manchas, y no "imitándolo".

Pero este reconocimiento sólo puede producirse con una doble condición: hay que conocer tanto el objeto representado, es decir, haber visto uno en precedencia; como también "ver" *la similitud entre el contorno cerrado que se ha trazado y el contorno del objeto*. El grado de particularización e información de la imagen, o del cuadro, depende entonces de la correspondencia que pueda establecerse entre los trazos internos al contorno cerrado y los detalles observables del objeto representado.

La superposición intuitiva de los respectivos contornos y el grado de particularización de la imagen son los dos criterios de similitud entre un dibujo o una pintura y lo que estos representan. Estos dos criterios permiten así distinguir *grados de iconicidad* entre la iconicidad perfecta de algunos cuadros que muestran a la "persona misma", por ejemplo en el caso de un retrato, y la generalidad extrema de un esquema que reduce el objeto a unos pocos rasgos (Duval, 2018, pp. 223-225, Figuras 4 y 5).

En pintura, el tipo de visualización basado exclusivamente en el reconocimiento de unidades figurales en 2D condujo a la revolución de la llamada pintura "abstracta". Las formas de los objetos 3D/3D, tal y como las ve la mirada, se descomponen en fragmentos, geometrizados o relevantes desde diferentes puntos de vista posibles sobre el objeto, y los fragmentos elegidos se ensamblan en una reconfiguración no icónica (Duval, 2018, p. 225, Figuras 6 y 7).

4. ¿Cómo el ver una figura, una imagen o un diagrama trae a la mente palabras?

La respuesta a esta pregunta cambia radicalmente según el tipo de visualización y según la función que llena la producción verbal. Nos limitaremos aquí a considerar sólo las figuras geométricas construidas instrumentalmente.

Las herramientas imponen, en el momento de la construcción de las figuras, la restricción de ciertas propiedades que las distinguen unas de otras (regla y compas o las instrucciones de un programa informático) y, por tanto, términos geométricos. En cualquier caso, cuando se mira una figura para resolver un problema, poco importa el tipo de herramienta que se utilizó para construirla, regla y compas o instrucciones de un "menú"; lo que cuenta es la forma en la cual se mira esa figura, independientemente de cualquier dimensión y de cualquier relación entre dimensiones. Entre los diferentes tipos de visualización que acabamos de distinguir, desde el punto de vista de su funcionamiento cognitivo, sólo dos son esenciales en lo que tiene que ver con la educación de la mirada en geometría.

El primer tipo de visualización matemática se refiere a la exploración visual heurística de las figuras a través de la descomposición y reconfiguración de unidades figuradas en 2D. La exploración visual de una figura es previa a cualquier formulación e independiente de las distintas propiedades que puedan tomarse como hipótesis.[2] Esta exploración puramente visual es más intuitiva y menos exigente que cualquier descripción o explicación verbal; por otra parte, descripciones o explicaciones verbales nunca han enseñado a mirar las figuras de forma matemática. Esta exploración visual es la que permite *reconocer el teorema, la definición o la fórmula pertinente para resolver un problema asignado*. Sin embargo, como por toda actividad intencional, mirar requiere una verbalización silenciosa que controle la gestión de esta exploración puramente visual y condense el resultado. La característica de esta verbalización silenciosa, como señaló Vygotsky, es que no necesita palabras para designar o calificar las unidades figurales 2D que han sido descompuestas y reconfiguradas por la mirada.

Por el contrario, el segundo tipo de visualización, es decir la deconstrucción dimensional de las formas, requiere una formulación explícita de las diferentes relaciones entre dos unidades figurales de menor dimensión que las unidades figurales 2D que han sido deconstruidas dimensionalmente. Es la deconstrucción dimensional la que permite comprender todo el vocabulario geométrico básico: esta excluye toda verbalización silenciosa. Y el uso del vocabulario, a diferencia de las palabras del lenguaje común, no se pueden utilizar más que en el razonamiento que funciona por sustitución de enunciados y no por acumulación de "razones" como pasa en una argumentación (Figura 2, IV: denominar para deducir). *Y, para que tenga sentido, nunca es necesaria una figura. ¡Sólo hay que indicar las hipótesis!* Eso, al menos para los matemáticos y los profesores. Y este es el espejismo que lleva a la enseñanza de la matemática a un callejón sin salida. Para los matemáticos y los profesores, esta formulación explícita basada en la deconstrucción dimensional de las formas detecta una verbalización silenciosa, tanto que se les ha hecho evidente y familiar. Y esta se proyecta en la exploración heurística visual de las formas, como si la visualización y el lenguaje matemático fueran cognitivamente la misma cosa.

Estos dos tipos de visualización se basan en el principio de separación de formas y dimensiones. En cambio, la visualización de la tercera dimensión subordina la construcción de unidades figurales en 2D a las igualdades de relaciones entre cantidades determinadas a partir de un punto de fuga. La construcción matemática es la de una red de rectas que convergen hacia un punto de fuga, y la construcción de formas 2D se realiza sobre esta red de rectas en función de las relaciones de magnitudes elegidas desde este punto de fuga para marcar su mayor o menor distancia. Ver una figura en este caso significa discernir esta red de rectas, que no evoca palabras sino números y cálculos. La visualización icónica de los edificios en el espacio (3D/3D) se basa en la estructuración previa

[2] Para una misma figura construida, sólo se pueden cambiar los problemas planteados cambiando las hipótesis dadas. ¿Tendremos que concluir que hay tantas figuras como posibles opciones de hipótesis?

de su campo mediante una red de rectas que convergen hacia un punto situado por encima de una recta, la línea del horizonte.
En geometría, por tanto, ver y entender son operaciones fuertemente conectadas estructuralmente; si entender sin ver (en cualquier forma de visión) se presenta como imposible, lo contrario es, en cambio, un fenómeno muy presente: un constructo geométrico es visto como una acción sensorial, pero su sentido, su mensaje, no puede ser interpretado, y por tanto no es entendido; cognitivamente hablando, ese constructo no tiene el sentido que su creador - hacedor pretendía darle. Ver y comprender no son en absoluto sinónimos, es más, es precisamente en su dicotomía donde se crean situaciones de aprendizaje negativas. En el arte, a veces se puede crear una ilusión de comprensión, ligada al ver; pero la mayoría de las veces, esto es sólo una ilusión; un inexperto en arte figurativo ve una obra de Jackson Pollock, pero no tiene ningún apoyo en lo cognitivo que posee: ve, pero no puede entender el significado de la operación pictórica, ni siquiera si recurre a un nombre, un título o una leyenda. Pero aquí, a diferencia que en geometría, la palabra no suele designar lo que el cuadro representa, sino lo que inspiró al pintor o la resonancia de las cosas y la luz en la mirada de quien mira (Duval, 2018, pp. 227-228), a menudo con referencia a la historia del arte, cuyo conocimiento reside en lo cognitivo y no sólo en la visión.

4. Cómo percibir, reconocer y evaluar las figuras imposibles en el arte figurativo; de la mirada al análisis visual

Como ya habíamos anticipado, continuando el estudio iniciado por Duval (2018), abordamos ahora el problema del reconocimiento de la imposibilidad (estructural) de una imagen 3D representada en perspectiva en una superficie 2D. En este caso, la mera mirada ya no parece ser suficiente, ni sirven comparaciones en tres dimensiones, definiciones o conocimiento de términos.
Para hacer más efectivo el estudio, recurriremos a ejemplos del arte figurativo contemporáneo; muchos otros ejemplos, incluso mucho más antiguos, pueden encontrarse en D’Amore (2015a).
A partir de 1934, el entonces joven pintor sueco Oscar Reutersvärd se dedicó a dibujar “figuras imposibles” (éste era el nombre original), entre las que destaca desde el principio, es decir, mucho antes de 1958, el llamado “triángulo de Penrose” (D’Amore, 2000, 2002, 2015a). Esto no quita que, mientras el artista representaba lo imposible geométrico por puro gusto estético y para refinar una sensibilidad de perspectiva personal, los Penrose fueron los primeros en estudiar la psicología relacionada con la visión humana de esta forma 2D que alude a una 3D imposible (Penrose & Penrose, 1958). Sin embargo, el artista sueco se dedicó sobre todo a una versión asombrosamente diferente y muy famosa que consiste en cubos de perspectiva (D’Amore, 2005).

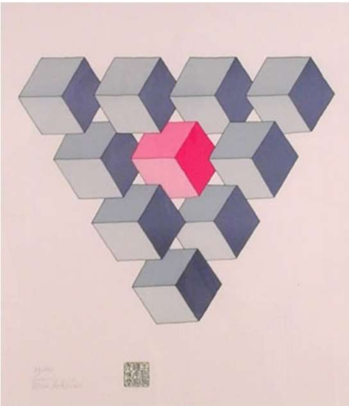

Figura 3. *Opus 1*, Oscar Reutersvärd, 1934.

La mirada capta la imposibilidad global con mayor dificultad que en el clásico triángulo imposible de los Penrose, quizá debido a la fragmentación de los componentes y a la dificultad de coordinar la mirada sometida a múltiples sugerencias visuales; los tres componentes laterales, lo que en el triángulo imposible serían los tres "lados", cada uno de los cuales (aisladamente) es posible, están aquí constituidos por cuatro pequeños cubos, cada uno de los cuales está correctamente representado desde un punto de vista perspectivo. Se puede eliminar el cubo central y estudiar lo que queda de la propuesta del artista.

Figura 4. Elaborazione di *Opus 1*, Oscar Reutersvärd.

La mirada queda como atrapada por la ilusoria estrella de 6 puntas que parece aparecer en el centro y el lenguaje silencioso la comenta mentalmente, describiéndola; en el transcurso de una segunda mirada, esta imagen se impone, como señaló el mismo artista.
A este momento se puede realizar una operación gráfica muy interesante: eliminar los dos cubos centrales de cada lado del triángulo, un lado a la vez, con el fin de restaurar una consistencia aceptable de la perspectiva de los tres componentes diferentes del diseño (D'Amore, 2015a, p. 458).

Figura 5. Elaboraciones de *Opus 1*, Oscar Reutersvärd: cada una de ellas es perspectivamente aceptablemente correcta.

La "yuxtaposición gráfica" de tres figuras aceptablemente correctas desde el punto de vista perspectivo (aunque no perfectas) es una figura perspectivamente imposible.
En este análisis de una obra de arte, queda claro el papel que juegan las miradas, o, dicho de otra forma, su concatenación; y la importancia del llamado "diálogo silencioso".

5. El papel explícito de la semiótica en el análisis de una obra de arte, según la pretende el autor: cuando la mirada ya no es suficiente para entender lo que se ve

Recordemos la muy célebre obra *Ceci n'est pas une pipe* (*Esta no es una pipa*) que el genial pintor belga, a menudo calificado como "surrealista", René Magritte, creó en varias versiones entre 1929 y 1946.[3]

[3] Para un análisis histórico, crítico, semiótico y artístico de esta operación pictórica, véase

Figura 6. *La trahison des images*, René Magritte, 1928-1929. Los Angeles County Museum of Art, Los Angeles.

En cuanto al título, destinado a sorprender al visitante, aunque la imagen de la pipa es icónicamente perfecta, no hay coincidencia entre el objeto 3D representado, inmediatamente perceptible y reconocible a primera vista, y su representación 2D casi fotográfica. Sin embargo, el discurso interior se vuelve interesante cuando, después de haber identificado imagen y objeto representado, al segundo vistazo el observador lee la frase subyacente y entra así en el juego semiótico 2D/3D deseado por el autor. Este es un ejemplo perfecto de una obra en la cual no sólo hay que mirar, sino también leer; sin embargo, incluso la combinación mirada/lectura no es suficiente para entender el significado de la operación pictórica, si no hay más informaciones históricas-críticas-semióticas, estas últimas proporcionadas por el estudio de las intenciones del autor.
En otras obras del mismo autor, en las cuales se proponen situaciones que sólo parecen reales pero que en realidad son imposibles, tiene sentido la denominación "surrealismo" (que, en arte, tiene mil facetas diferentes); pero aquí el discurso, potente y culto, es sobre la interpretación semiótica del lenguaje del arte, un rebote continuo entre lo representado, lo representante, la percepción visual, la experiencia y la semiótica subyacente. Rebote en el cual

D'Amore (2010; 2015a).

juega un papel decisivo aquel lenguaje silencioso (y personal) mencionado varias veces.
Como prueba de esto, citemos un verdadero estudio teórico de Magritte, el dibujo/manifiesto *Les mots et les images* (*Las palabras y les imágenes*) (Magritte, 1929) que, aunque, como hemos dicho, es un estudio teórico, también fue expuesto como obra de arte.[4]

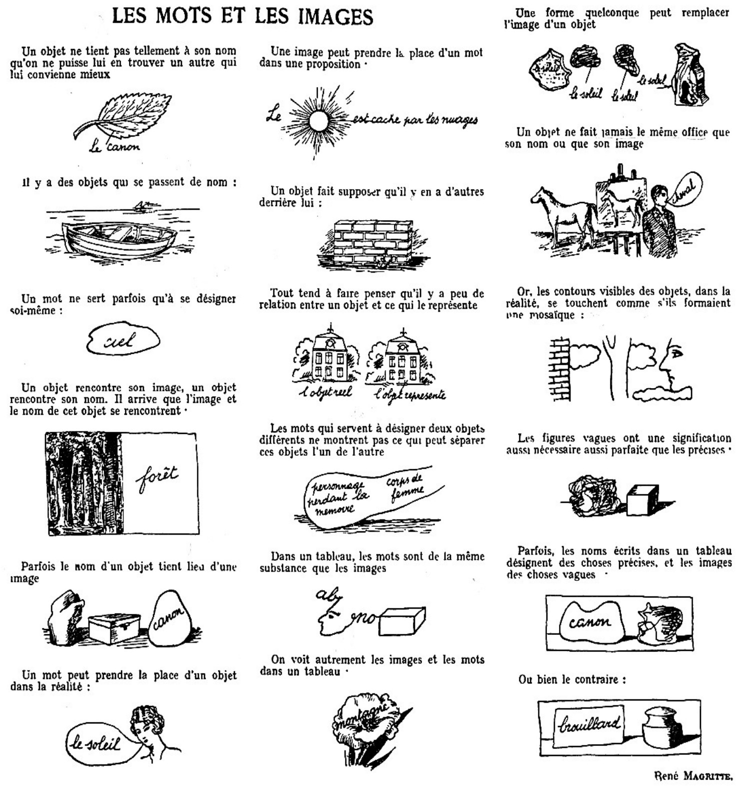

Figura 7. *Les mots et les images*, René Magritte. Imagen tomada de la revista: *La Révolution Surréaliste*, diciembre de 1929.

Dentro de este estudio, el detalle más famoso y perennemente discutido por su evidente referencia a una de las muchas versiones del llamado "triángulo semiótico" (Eco, 1975) es el relativo a la imagen del caballo. Aparece un caballo (obviamente dibujado, pero el significado es claro), una representación pictórica

[4] Un análisis profundo de este famoso dibujo de Magritte, con reproducciones de otras obras del propio pintor belga y con la reedición de los escritos teóricos de Magritte, puede encontrarse en Lageira (2003).

del mismo (en un lienzo apoyado en un caballete), una enunciación verbal del mismo.

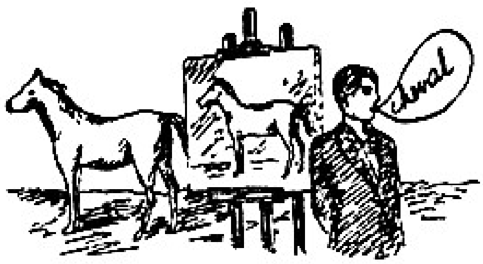

Figura 8. *Les mots et les images*, René Magritte, 1929. Particular.

Este análisis del lenguaje pictórico mediante una tríada de referencias semióticas y sus relaciones nos lleva a recordar los trabajos del lógico matemático alemán Gottlob Frege (1892) que, sin embargo, analizó el lenguaje lógico de la matemática. Pero sobre este punto glosamos, remitiéndonos a D'Amore (2010, 2015a).

La idea de Magritte tuvo un largo seguimiento (que aún continúa) entre los artistas de todo el mundo, especialmente entre los que, en los años 60-80, fueron los creadores de la llamada corriente "conceptual científica", aunque con sus múltiples facetas (D'Amore & Menna, 1974; Menna, 1975; Di Genova, 1993). Entre los principales intérpretes no sólo de la vertiente analítica, sino precisamente de esta coincidencia entre el arte figurativo expuesto y el análisis semiótico de la pareja objeto-representación, mencionamos por orden cronológico al estadounidense Joseph Kosuth y al francés Bernar Venet.

El objeto de arte (el que se expone) no es ni el tubo metálico real colocado en el suelo, ni su representación axonométrica, dibujada en una hoja de dibujo y colocada en un marco, colgada en la pared del fondo de una galería de arte. La obra de arte es puramente semiótica: la emergencia de un sistema de representaciones y transformaciones que llevan de una representación a otra (D'Amore, 2015b).

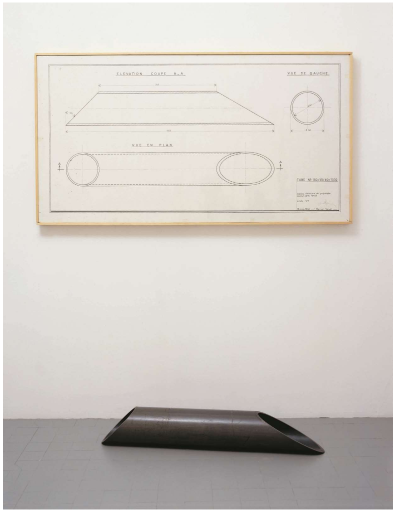

Figura 9. *Tube n° 150/45/60/1000*, Bernar Venet, 1966.

La misma operación semiótica es realizada simultáneamente por Kosuth.

Figura 10. *One and three chairs*, Joseph Kosuth, 1965.

La misma obra ha sido recreada por Kosuth decenas de veces, con diferentes sillas, por tanto con diferentes fotografías, pero siempre en la tríada semiótica: objeto real, fotografía que reproduce el objeto, definición de silla tomada de un diccionario. Representaciones (fotografía y definición del objeto) en registros semióticos distintos, conversiones semióticas en curso. La obra de arte no es la tríada visual que cae bajo nuestro sentido de la vista, captada por la mirada, ni ninguno de estos objetos por separado: es la relación semiótica que emerge de estos, el forzar al observador a percibir cada elemento de la tríada con su mirada, distinguiendo sus funciones recíprocas, desencadenando un discurso silencioso que conecta cada uno de los elementos con los demás.
Sobre la interpretación de estas obras desde el punto de vista semiótico, véase también Duval (2008).

Otra obra de Joseph Kosuth que encaja perfectamente en nuestro discurso es *Neon electrical light English glass letters white eight*, 1966, que representa, como dice su título, "ocho letras blancas de vidrio inglesas en vidriode luz eléctrica de neon" (Museo Salomon Guggenheim, Nueva York); y también la obra *Painting*, 1966, que representa en una pintura la definición de "pintura" en un cuadro. (Estas obras también se han producido multitud de veces, en muchas versiones). Kosuth representa perfectamente el espíritu de esta investigación artística, jugando con la univocidad de la referencia semántica, una especie de mono-semía que se opone a la típica poli-semía que siempre ha caracterizado al arte en su sentido romántico. El conjunto de su obra de este período puede resumirse en su proyecto: *El arte como idea como idea* (D'Amore, 2015a).

Desde nuestro punto de vista, se trata de ejemplos, tomados del mundo del arte, que muestran como son decisivas las relaciones (a veces opuestas entre sí) entre lo que se ofrece a la vista, la aparición objetual, la compleja referencia semiótica, el profundo y silencioso discurso interno personal y la interpretación de los distintos componentes entre sí, y luego de éstos con la obra en su conjunto.
Esta complejidad no es tan diferente de ciertas situaciones determinadas en las aulas, durante las clases de geometría, cuando chocan entre ellos diferentes registros y diferentes componentes interpretativas. Así como en la obra de Kosuth relativa a las sillas hay implícitas transformaciones semióticas de conversión, cada una de las cuales reúne dos representaciones en registros diferentes que requieren interpretaciones específicas, lo mismo sucede al

descifrar, comprender, deconstruir figuras que describen una situación, por ejemplo en relación con los diferentes pasos de una demostración o, por ejemplo, al pasar de una escritura algebraica a una analítica-gráfica cartesiana, como parece sugerir también esta obra de Venet, estudiada en detalle en D'Amore (2015b).

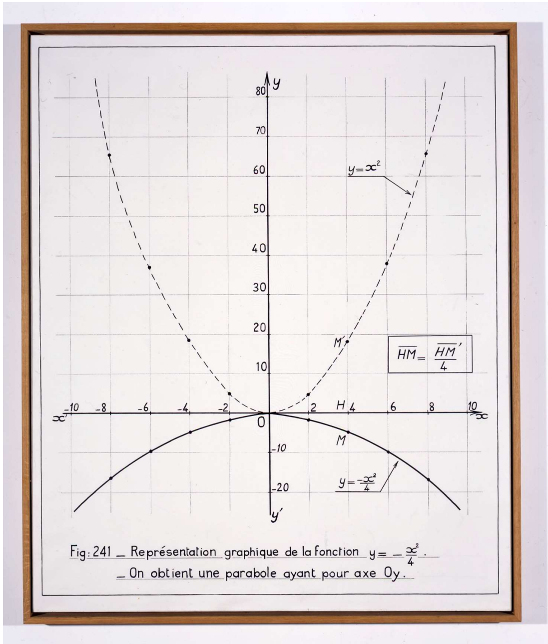

Figura 11. *Representación gráfica de la función y = -x^2/4*, Bernar Venet, 1966. Acrílico sobre lienzo, 146×121 cm. Museo Nacional de Arte Moderno, Centro Pompidou, París, Francia.

En esta obra se destacan tres representaciones semióticas de un mismo objeto matemático:
- en el registro analítico-gráfico (un dibujo en el plano cartesiano);
- en el registro algebraico (una fórmula);
- en el registro del lenguaje natural: una descripción en palabras: "Se obtiene una parábola que tiene como eje Oy".

Pero el campo de la creación es el artístico, no una lección de geometría, y en los años en los cuales las reflexiones semióticas (al menos en matemáticas) estaban aún por llegar ...

Referencias bibliográficas

Asenova, M. (2018). Vedere geometricamente: La percezione non iconica nella scuola primaria. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 173–210.

D'Amore, B. (2000). Oscar Reutersvärd. En A. Bonfiglioli & C. Valentini (Eds.), *Matematica, arte e tecnologia: da Escher alla computer* graphics (pp. xix–xxi). Bologna: Aspasia.

D'Amore, B. (2002). L'opera di Oscar Reutersvärd. *La matematica e la sua didattica*, *16*(3), 240–245.

D'Amore, B. (2005). Oscar Reutersvärd. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), *8*(3), 379–382.

D'Amore, B. (2010). Figurative arts and mathematics: Pipes, horses and meanings. En V. Capecchi, M. Buscema, P. Contucci, & B. D'Amore (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts: Mathematics and Society* (pp. 491–504). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

D'Amore, B. (2015a). *Arte e matematica: Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili.* Bari: Edizioni Dedalo.

D'Amore, B. (2015b). Bernar Venet: Elogio del processo razionale. *Nuova Meta*, 37, 30–41. Disponible en: www.rivistaartenuovameta.it

D'Amore, B., & Duval, R, (2019). L'educazione dello sguardo in geometria elementare e in arte figurativa. Quali variabili cognitive e didattiche sono coinvolte? Come si rappresenta in arte l'impossibilità? Quali elementi semiotici possono essere coinvolti nell'arte? The education of the gaze in elementary geometry and in figurative art. What are the cognitive and educational variables involved? How does art represent impossibility? What semiotic elements can we take into account be in art? *La matematica e la sua didattica*, *27*(1), 47-67. http://www.incontriconlamatematica.net/portale/rivista/88-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica-anno-27-aprile-2019-numero-1

D'Amore, B., & Menna, F. (1974). *De mathematica*. [Catalogo de la exhibición internacional homónima]. Roma: Galleria dell'Obelisco.

Di Genova, G. (1993). *Storia dell'arte italiana del '900*. Bologna: Bora.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5–53.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in*

Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom and Culture (pp. 39–61). Rotterdam: Sense Publishers.
Duval, R. (2015). Figures et visualisation géométrique: «voir» en géométrie. En J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Figure* (pp. 147–182). Grenoble: Presses Universitaires.
Duval, R. (2018). Per l'educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 211–245.
Eco, U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.
Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik,* 100, 25–50.
Lageira, J. (2003). *Magritte: Mots et images*. Paris: Gallimard.
Magritte, R. (1929). Les mots et les images. *La Révolution surréaliste*, *5*(1), 32–33.
Menna, F. (1975). *La linea analitica dell'arte moderna*. Milano: Einaudi.
Penrose, L. S., & Penrose, R. (1958). Impossible objects: A special type of visual illusion. *British Journal of Psychology*, *49*(1), 31–33.